MAGNETOSTATIQUE

I. Le courant électrique

1. Définition

Un courant électrique correspond à un déplacement d'ensemble **ordonné** des porteurs de charges d'un milieu conducteur.

Par exemple, dans les métaux, ceux sont des électrons dits de conduction qui sont en mouvement par rapport à un réseau de cations fixes (qui freine d'ailleurs leur déplacement). En l'absence de force extérieure, les électrons se déplacent de façon désordonnée (mouvement aléatoire du à l'agitation thermique) et leur vitesse moyenne est nulle. Le mouvement d'ensemble ordonné résulte de l'action d'un champ électrique $\vec{E}$.

2. Vecteur densité de courant

- ***Densité volumique de courant***

Considérons un ensemble de particules de charges q, de densité particulaire n^* ayant un mouvement d'ensemble à la vitesse $\vec{v}$. Par définition, on appelle $\boxed{\vec{j} = n^* q\vec{v}}$ le **vecteur densité volumique de courant**.

<u>*Remarque*</u> *:* on note parfois $\rho_m = n^* q$ qui désigne la densité volumique de charges <u>mobiles</u> à ne pas confondre avec la densité volumique totale de charges ρ vue en électrostatique qui prend également en compte les charges fixes (par exemple les cations fixes formant le réseau cristallin d'un conducteur métallique).

Considérons une portion de conducteur de section droite S parcouru par un courant I engendré par des particules de charge q, de densité particulaire n^* et vitesse d'ensemble $\vec{v}$.

L'intensité I correspond à la charge mobile dq traversant la surface S pendant dt : $I = \frac{dq}{dt}$. Avec $dq = n^* qSvdt$ il vient $I = n^* qSv = jS$. **Ainsi l'intensité électrique correspond au flux de $\vec{j}$ à travers la section S qui s'écrit plus généralement :** $\boxed{I = \iint_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}}$.

- ***Densité surfacique et linéique de courant***

La distribution volumique de courant correspond à la réalité physique des conducteurs. Comme en électrostatique, on utilise des <u>modélisations</u> pour représenter certaines géométries de conducteurs.

Par exemple, des nappes de courant d'épaisseur négligeable sont caractérisées par **un vecteur densité surfacique de courant** : $\boxed{\overrightarrow{j_S} = \sigma_m \vec{v}}$ où σ_m représente la densité surfacique de charges mobiles.

De même, les conducteurs filiformes (faible section du fil par rapport à sa longueur) sont caractérisés par **une densité linéique de courant** qui correspond tout simplement au courant I parcourant le fil. <u>Dans le cadre du programme nous nous limiterons à cette modélisation linéique</u>.

3. Vecteur élément de courant

Considérons un élément de volume mésoscopique $d\tau$ d'un conducteur à l'intérieur duquel le vecteur densité de courant est $\vec{j}$. Par définition, on appelle $\boxed{\overrightarrow{dC} = \vec{j} d\tau}$ le **vecteur élément de courant**.

II. Champ magnétostatique $\vec{B}$

Nous savons qu'un aimant ou un circuit parcouru par un courant électrique sont sources d'un champ magnétique $\vec{B}$. Ce champ se manifeste par **la force de Lorentz** que subit une particule mobile de charge q et de vitesse $\vec{v}$ passant à proximité de ces sources $\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$; ou par **la force de Laplace** que subit un élément $\overrightarrow{dl}$ d'un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I : $\boxed{d\vec{F} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}}$.

- *Correspondance entre force de Lorentz et force de Laplace*

Considérons un tube de courant élémentaire de volume $d\tau$ et de vecteur densité de courant $\vec{j}$. Ce tube contient $n^* d\tau$ charges mobiles q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ ($\vec{j} = n^* q\vec{v}$).

Il est soumis à la force élémentaire de Lorentz : $d\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $dq = qn^* d\tau$. Ainsi $d\vec{F} = qn^* d\tau \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ soit $\boxed{d\vec{F} = \overrightarrow{dC} \wedge \vec{B}}$

Pour un conducteur filiforme (section négligeable devant la longueur) : $\overrightarrow{dC} = I\overrightarrow{dl}$ d'où $d\vec{F} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ (force de Laplace).

III. Loi de Biot et Savart

Notons $\overrightarrow{dB}(M)$ le champ magnétostatique produit au point M par l'élément de courant $\overrightarrow{dC}$ se trouvant au voisinage du point P d'une distribution quelconque de courant. Bien qu'il soit impossible d'isoler l'action magnétique de chaque élément de la distribution de courant, **Biot et Savart**, afin d'interpréter les résultats de leurs expériences, ont postulé que :

$$\boxed{\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{dC} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi PM^2} \overrightarrow{dC} \wedge \vec{u}_{P\to M}}$$

- *Analogie entre les expressions des champs élémentaires électrostatique et magnétostatique :*

Rappel cours Champ électrostatique : Le champ électrostatique créé en M par la charge dq placée au point P de la distribution de charges s'écrit d'après **la loi de Coulomb** : $\boxed{\overrightarrow{dE}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$

Pour obtenir $\overrightarrow{\mathrm{dB}}(\mathrm{M})$ il suffit de remplacer :

- ε_0 par $\frac{1}{\mu_0}$
- dq par $\overrightarrow{dC} \wedge$

Par principe de superposition, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par la distribution de courant (D) correspond à la somme de tous les champs élémentaires. Suivant le type de distribution **la Loi de Biot et Savart** s'écrit :

- ***Pour une distribution discontinue*** : $\boxed{\vec{B}(M) = \sum_{P\in(D)} \frac{\mu_0}{4\pi PM^2}\overrightarrow{dC} \wedge \vec{u}_{P\to M}}$

- ***Pour une distribution continue :***

- *Volumique* : $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(D)} \frac{\overrightarrow{dC} \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(D)} \frac{\vec{j}d\tau \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2}}$

- *Surfacique :* $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{P\in(D)} \frac{\overrightarrow{dC} \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{P\in(D)} \frac{\vec{j}_S dS \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2}}$

- *Linéique :* $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)} \frac{\overrightarrow{dC} \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)} \frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}_{P\to M}}{PM^2}}$

IV. Propriétés de symétrie du champ $\vec{B}$

Comme pour le champ électrostatique, l'analyse des symétries d'une distribution de courant va nous permettre d'en déduire les propriétés de symétrie du champ créé par cette distribution et donc **d'en simplifier le calcul**.

1. Invariances d'une distribution

- **Invariance par translation**

Soit une distribution de courant invariante par translation le long de l'axe (Oz) : quelque soit z, $\vec{j}(x,y,z)=\vec{j}(x,y)$. Le champ créé par cette distribution est alors indépendant de z : $B(x,y,z)=B(x,y)$.

- **Invariance par rotation**

On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z).
Soit une distribution de courant invariante par rotation autour de l'axe (Oz) : quelque soit θ, $j(r,\theta,z)=j(r,z)$. Le champ créé par cette distribution est alors indépendant de θ : $B(r,\theta,z)=B(r,z)$.

2. Propriétés de symétrie du champ $\vec{B}$

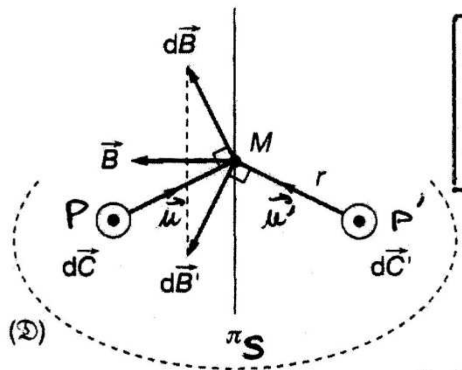
Soit P un point de la distribution de courant et P' son symétrique par rapport à un plan π : $P' = sym_\pi(P)$.
Soit M un point de l'espace et M' son symétrique par rapport au plan π : $M' = sym_\pi(M)$.

- **Plan de symétrie**

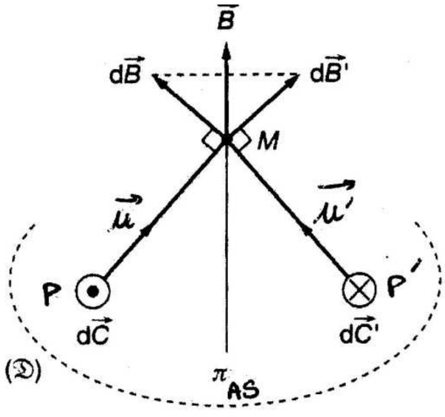
Le plan π est un plan de symétrie de la distribution de courant, noté π_S, si : $\boxed{\vec{j}(P')=sym_{\pi_S}\vec{j}(P)}$.
Le champ magnétostatique créé par la distribution de courant est alors antisymétrique par rapport au plan de symétrie π_S : $\boxed{\vec{B}(M')=-sym_{\pi_S}[\vec{B}(M)]}$. Si M appartient à π_S alors $\vec{B}(M)$ est orthogonal à π_S.
Conclusion : **Le champ magnétostatique créé en un point d'un plan de symétrie est perpendiculaire à ce plan.**

- **Plan d'antisymétrie**

Le plan π est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, noté π_{AS}, si : $\boxed{\vec{j}(P')=-sym_{\pi_{AS}}\vec{j}(P)}$.
Le champ magnétostatique créé par la distribution de courant est alors symétrique par rapport au plan d'antisymétrie π_{AS} : $\boxed{\vec{B}(M')=sym_{\pi_{AS}}[\vec{B}(M)]}$. Si M appartient à π_{AS} alors $\vec{B}(M)$ est contenu dans π_{AS}.
Conclusion : **Le champ magnétostatique créé en un point d'un plan d'antisymétrie appartient à ce plan.**



$$\overrightarrow{PM} = PM\vec{u}$$
$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dC}\wedge\vec{u}}{PM^2}$$



(D) distribution de courant

Remarque : On voit que les propriétés de symétries de $\vec{B}$ sont <u>opposées</u> à celles de $\vec{E}$. Ceci est du au fait que $\vec{B}$ est défini par un produit vectoriel : on dit que le champ magnétique est un pseudo-vecteur ou un vecteur axial.

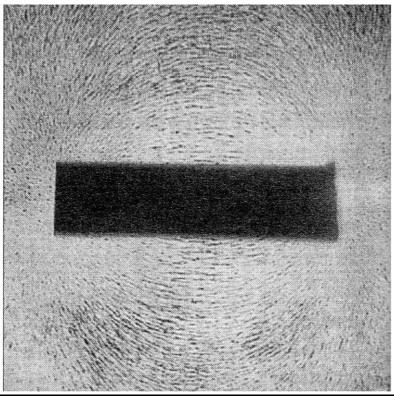
V. Topographie du champ $\vec{B}$

1. Cartes de Champ

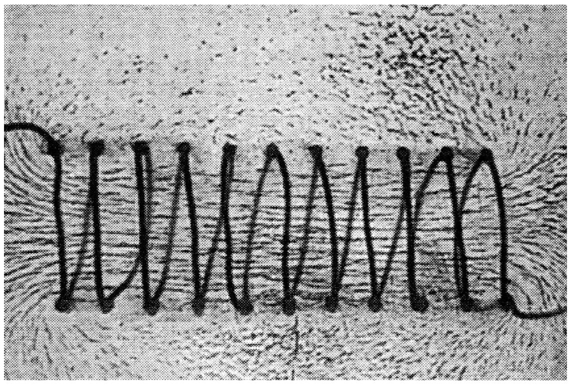
- **Lignes de champ**

Une courbe tangente au champ $\vec{B}(M)$ en chacun de ses points M est appelée **ligne de champ magnétostatique.** Cette courbe est orientée par le sens du champ.

Il est possible de visualiser les lignes de champ magnétique. Pour cela on dépose de la limaille de fer sur une plaque. Les grains de limaille, sous l'action d'un champ créé par un aimant ou un circuit, s'orientent parallèlement au champ magnétique : on obtient ainsi des spectres magnétiques.



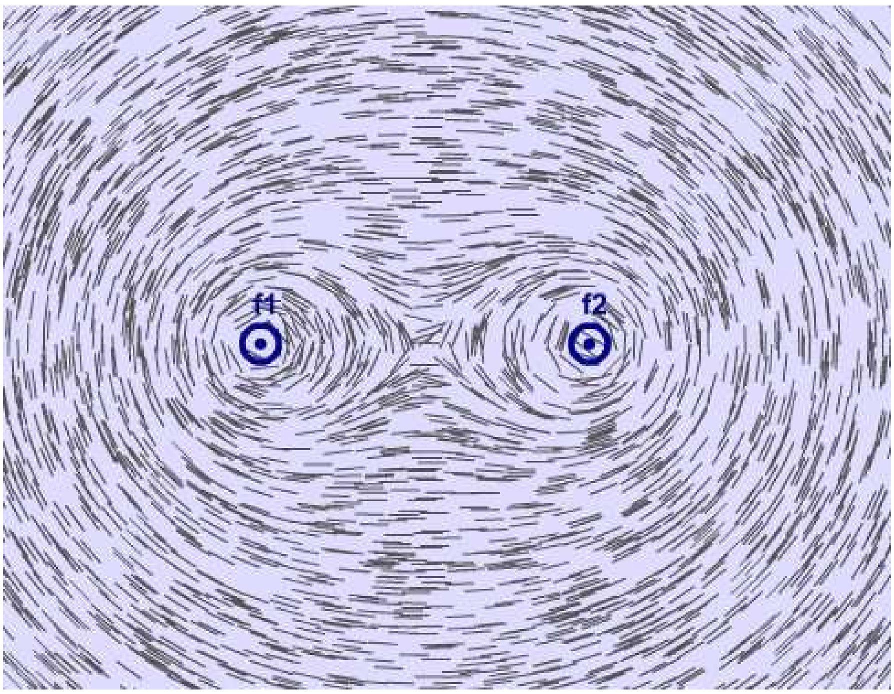
Spectre magnétique d'un aimant

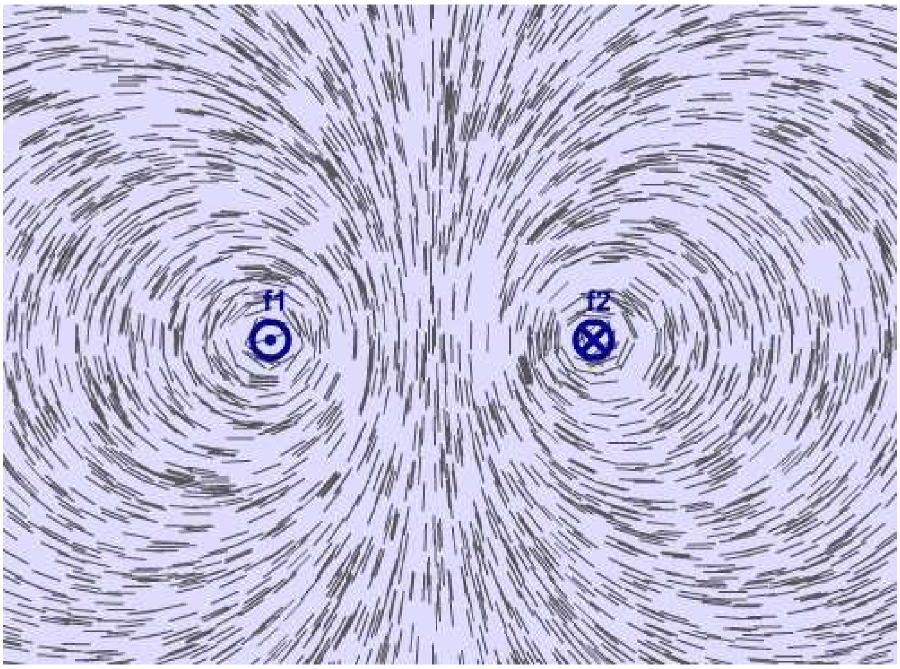


Spectre magnétique d'un solénoïde

Comme pour $\vec{E}$ on détermine son équation en écrivant que $\vec{B} \wedge \vec{dl} = \vec{0}$ où $\vec{dl}$ représente un déplacement élémentaire sur la ligne de champ. Un tube de champ est l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé**. Deux lignes de champ ne peuvent se couper en un point M que si le champ est nul en ce point :** $\vec{B}(M) = \vec{0}$**.**

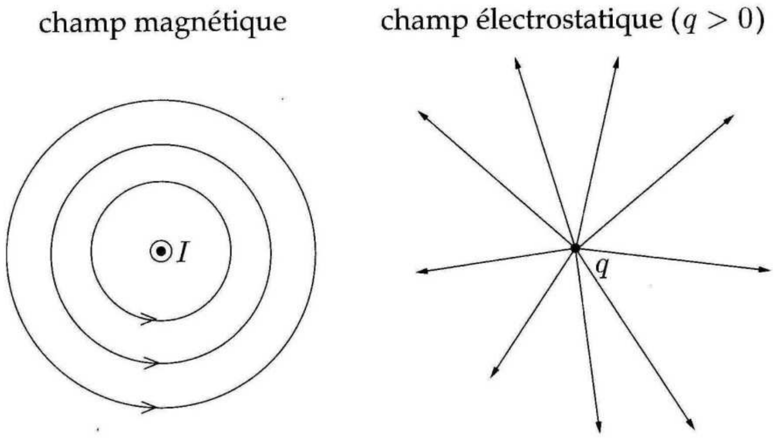
- **Exemples de cartes de champ**





2. Propriétés des lignes de champ

On a vu que les lignes de champ électrostatique convergent ou divergent vers les sources qui le créent. Par contre les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des sources qui le créent.



Cette différence est essentielle au niveau des propriétés de ces champs.

- **Champ électrostatique**

Les lignes du champ électrostatique sont radiales par rapport à une charge ponctuelle et peuvent donc être perpendiculaires à une surface ou un contour fermés entourant la charge. Par conséquent, la circulation de $\vec{E}$ sur le contour fermé est nulle (**circulation conservative**) $C = \oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$ et le flux $\vec{E}$ à travers la surface fermée nous conduit au théorème de Gauss $\phi = \oiint \vec{E}\vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

- **Champ magnétostatique**

Les lignes du champ magnétostatique sont orthoradiales (s'enroulent autour des courants) et peuvent donc être parallèles à une surface ou un contour fermés entourant les courants. Par conséquent, le flux de $\vec{B}$ à travers la surface fermée est nul (**flux conservatif**) $\phi = \oiint \vec{B}\vec{dS} = 0$ et la circulation de $\vec{B}$ sur le contour fermé nous conduit au théorème d'Ampère $C = \oint \vec{B}.\vec{dl} \neq 0 = ...$

VI. Théorème d'Ampère

Ce théorème joue le rôle en magnétostatique du théorème de Gauss en électrostatique. Il permet de calculer le champ $\vec{B}$ créé par des distributions de courants possédant un haut degré de symétrie (fil infini, solénoïde infini).

- ***Enoncé du théorème d'Ampère***

La <u>circulation du champ</u> $\vec{B}$ créé par une distribution de courants le long d'un <u>contour fermé</u> orienté (C) est égale à la somme des <u>intensités algébriques des courants enlacés</u> par ce contour multiplié par μ_0 :

$$\boxed{\oint_{M\in(C)} \vec{B}(M).\vec{dl} = \mu_0 \times \sum I_{enlacés}}$$

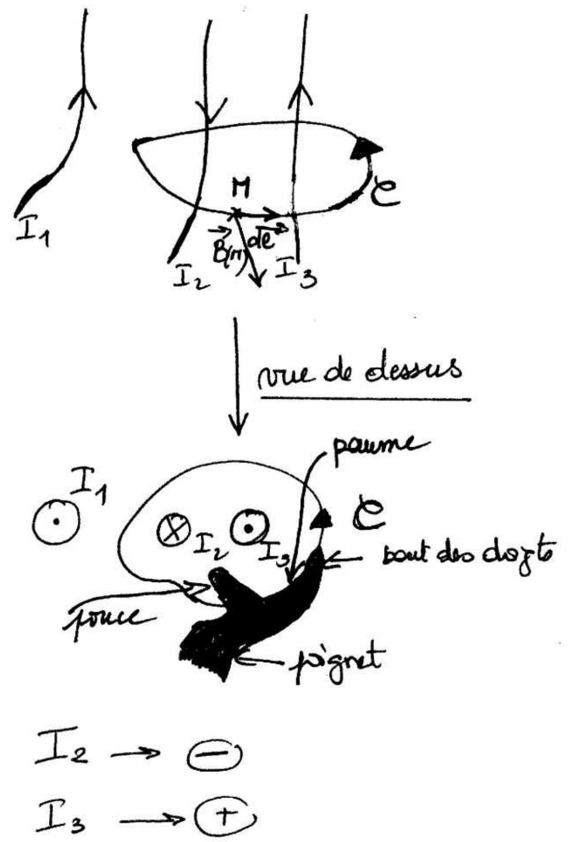
- $\mathcal{D}$: <u>distribution de courants</u> $\{I_1, I_2, I_3\}$
- $\mathcal{C}$: Contour <u>orienté arbitrairement</u> et <u>fermé</u>

$$\boxed{\sum I_{enlacés} = I_3 - I_2}$$

↓ <u>justification</u>

- I_1 n'est pas enlacé par le contour donc n'intervient pas.
- Pour déterminer <u>le signe des courants enlacés</u> :

1) Poser la main DROITE sur le contour ($\mathcal{C}$), la paume tournée vers l'intérieur du contour
Le sens arbitraire du contour va du poignet jusqu'au bout des doigts.
2) Le pouce pointe dans la direction des courants enlacés comptés positivement.



VII. Calcul de $\vec{B}$ (Exemples fondamentaux)

- ***1) Champ magnétique créé par un fil infini***

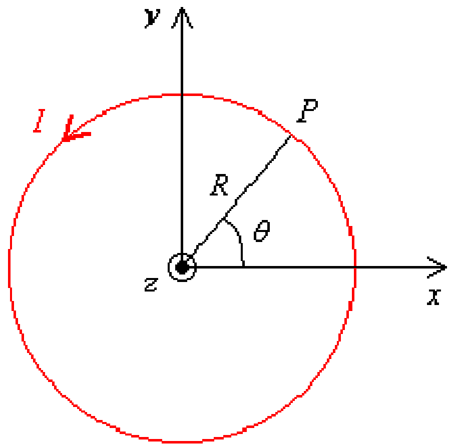
a) Calculer le champ $\vec{B}$ en tout point de l'espace par la loi de Boit et Savart.

b) Retrouver le résultat de la question a) en utilisant le théorème d'Ampère.

- ***2) Champ magnétique sur l’axe d’un solénoïde circulaire***

En électromagnétisme, on appelle spire de courant un circuit électrique fermé parcouru par un courant électrique. Le circuit le plus simple étant un cercle (aussi appelé boucle) pour lequel le mouvement d'ensemble des électrons est circulaire. Un ensemble de spires de courant disposées côte à côte constitue une bobine électrique ou solénoïde.

Solénoïde Circulaire



Spire Circulaire

a) Calculer le champ $\vec{B}$ sur l’axe d’une spire circulaire (loi de Biot et Savart).

b) Par principe de superposition, déterminer le champ $\vec{B}$ sur l’axe d’un solénoïde circulaire (loi de Biot et Savart).

c) Donner l’expression du champ $\vec{B}$ sur l’axe dans la limite du solénoïde infini.

d) Dans le cas du solénoïde infini, calculer le champ $\vec{B}$ en tout point de l’espace en utilisant le théorème d’Ampère. (On reprendra le résultat trouvé à la question c)).

ILLUSTRATION : Lignes de champ créées par un solénoïde

Le sens du champ se trouve par la règle de la main droite (FIGURE 1) ou en passant par le bonhomme d’Ampère (FIGURE 2)

FIGURE 1

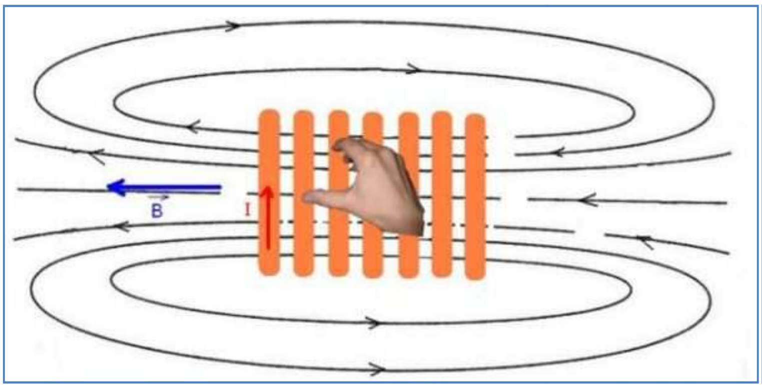


FIGURE 2